Der Q-D-Algorithmus von Heinz Rutishauser

Ac 02-1982 bis 11-2022

Zu einem Polynom $\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \quad ; n \in \mathbb{N}^*}$

sollen alle Nullstellen ohne Eingabe von Startwerten berechnet werden.

Dies ist mit dem so genannten Q-D-Algorithmus unter bestimmten Voraussetzungen möglich.

Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus (kurz: Q-D-Algorithmus) von Heinz Rutishauser (1954) ist eine Methode zur Konstruktion von n Zahlenfolgen ($q_k^{(v)}$) ; k = 1; 2; 3; ... ; n , die für wachsendes v (v = 0; 1; 2; ...) gegen die k Nullstellen x_k von $P_n(x)$ streben, d.h. $q_k \rightarrow x_k$ für $v \rightarrow \infty$.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Q-D-Algorithmus ist, dass sämtliche Polynomkoeffizienten a_i ungleich Null sind !
Ist dies nicht der Fall, so bestimmt man mithilfe des vollständigen Horner-Schemas ein ErsatzPolynom $P(x-x_0)$, wobei x_0 so zu wählen ist, dass alle Koeff. ungleich 0 sind .

Voraussetzung für die Konvergenz ist, dass alle Nullstellen betraglich verschieden sind !

Für den Fall, dass 2 oder mehr Nullstellen betragsgleich sind, gibt es spezielle Lösungsmöglichkeiten, die weiter unten erläutert werden !

Neben den Folgen ($q_k^{(v)}$) werden noch Hilfsfolgen ($e_k^{(v)}$) benötigt, welche unter den oben genannten Voraussetzungen für wachsendes v gegen Null konvergieren, d.h. $e_k \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$.

Die Werte für $q_k^{(0)}$, $e_k^{(0)}$, $e_0^{(v)}$, $e_n^{(v)}$ werden wie folgt berechnet:

$q_1^{(0)} = - a_{n-1} / a_n$

$q_k^{(0)} = 0$ für k = 2 bis n

$e_0^{(v)} = e_n^{(v)} = 0$ für v = 0 bis **vmax** (vorher festzulegen !)

$e_k^{(0)} = a_{n-k-1} / a_{n-k}$ für k = 1 bis n-1

Die Zahlenfolgen $q_k^{(v)}$, $e_k^{(v)}$ ergeben sich durch folgende Vorschriften:

$q_k^{(v+1)} = q_k^{(v)} + e_k^{(v)} - e_{k-1}^{(v)}$ für k = 1 bis n und v = 0 bis vmax

$e_k^{(v+1)} = e_k^{(v)} \cdot q_{k+1}^{(v+1)} / q_k^{(v+1)}$ für k = 1 bis n-1 und v = 0 bis vmax

Das folgende Schema stellt den Sachverhalt in einer Tabelle für den Fall **n = 4** dar:

	$q_1^{(0)}$		$q_2^{(0)}$		$q_3^{(0)}$		$q_4^{(0)}$	
$e_0^{(0)}$		$e_1^{(0)}$		$e_2^{(0)}$		$e_3^{(0)}$		$e_4^{(0)}$
	$q_1^{(1)}$		$q_2^{(1)}$		$q_3^{(1)}$		$q_4^{(1)}$	
$e_0^{(1)}$		$e_1^{(1)}$		$e_2^{(1)}$		$e_3^{(1)}$		$e_4^{(1)}$

etc.

<u>Beispiel:</u> $P(x) = 128x^4 – 256x^3 + 160x^2 – 32x + 1$

Werte gerundet !

e_0	q_1	e_1	q_2	e_2	q_3	e_3	q_4	e_4	v
	2,0		0		0		0		0
0		-0,625		-0,2		-0,03125		0	0
	1,375		0,425		0,16875		0,03125		1
0		-0,193182		-0,079412		-0,005787		0	1

etc.

Bei diesem Beispiel streben die Hilfsfolgen e_K alle gegen 0, so dass es 4 betragsverschiedene Nullstellen gibt.

<u>Näherungslösungen sind:</u> $x_1 = 0,96194$ $x_2 = 0,69134$ $x_3 = 0,30866$ $x_4 = 0,03806$

Der Fall betragsgleicher Lösungen:

Fall A) Je 2 Lösungen sind betragsgleich: $| x_k | = | x_{k+1} |$

Für das betreffende k konvergiert die Folge q_k nicht und auch die e_k streben nicht gegen 0 !

Allerdings streben die Summe $q_k^{(v)} + q_{k+1}^{(v)}$ gegen einen Grenzwert g1 sowie
das Produkt $q_k^{(v-1)} \cdot q_{k+1}^{(v)}$ gegen einen Grenzwert g2 .

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - (q_k^{(v)} + q_{k+1}^{(v)}) \cdot x + q_k^{(v-1)} \cdot q_{k+1}^{(v)} = 0$
streben gegen die beiden betragsgleichen Nullstellen x_k und x_{k+1} .
Hierbei können die beiden Nullstellen reell oder konjugiert komplex sein .

Zur Iteration bietet sich das BAIRSTOW-Verfahren an !

Beispiel: $P(x) = x^4 – 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

e_0	q_1	e_1	q_2	e_2	q_3	e_3	q_4	e_4	v
	4,0		0		0		0		0
0		0,25		-16		-0,75		0	0
	3,294		-0,279		0,198		0,787		1
0		0,081		-10,652		-0,147		0	1
	3,375		-11,011		10,703		0,934		2
0		-0,264		10,353		-0,013		0	2
	3,111		-0,394		0,337		0,946		3
0		0,033		-8,841		-0,036		0	3
	3,145		-9,269		9,142		0,982		4
0		-0,099		8,72		-0,004		0	4
	3,046		-0,45		0,418		0,986		5

etc.

Bei diesem Beispiel strebt die Hilfsfolge e_2 nicht gegen 0, so dass es 2 betragsgleiche Nullstellen x_2 und x_3 gibt.

Wir betrachten die Folgen $q_2^{(v)} + q_3^{(v)}$ sowie $q_2^{(v-1)} \cdot q_3^{(v)}$.

v	$q_2^{(v)} + q_3^{(v)}$	$q_2^{(v-1)} \cdot q_3^{(v)}$
1	-0,081	0
2	-0,308	-2,986
3	-0,057	3,71
4	-0,127	-3,602
5	-0,032	-3,874
...	...	...
21	0	-3,999
...	...	...
30	0	-3,99999

Die Grenzwerte sind vermutlich 0 und -4 . Daher ist die quadr. Gleichung $x^2 – 4 = 0$ zu lösen.
Die Lösungen sind -2 und 2 . Die q_1 streben gegen 3 und die q_4 gegen 1 .

Ergebnis für die Nullstellen: $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = -2$ $x_4 = 1$

Fall B) Mehr als 2 Lösungen sind betragsgleich:

$$| x_k | > | x_{k+1} | = | x_{k+2} | = \dots = | x_{k+m} | > | x_{k+m+1} |$$

Zur Bewältigung dieses Problems kann man folgende Beziehungen verwenden:

$$q_1^{(v)} + q_2^{(v)} + \dots + q_n^{(v)} = - a_1 / a_0$$

$$q_1^{(v+1)} \cdot q_2^{(v+2)} \cdot \dots \cdot q_n^{(v+n)} = (-1)^n \cdot a_n / a_0$$

<u>Beispiel:</u> $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Zur Kontrolle: dieses Polynom hat an der Stelle $x = -1$ eine 4-fache Nullstelle .

Dieses Problem wird zunächst noch verschoben !

Betrachtung des Falls , dass ein oder mehrere Polynomkoeffizienten gleich 0 sind.

Für diesen Fall muss ein Ersatzpolynom $P(x - x_0)$ bestimmt werden, wobei das vollständige HORNER-Schema an der Stelle x_0 angewandt werden kann (HORNER-Schema s. weiter unten).

Beispiel von oben: $p(x) = x^4 – 6x^3 + 11x^2 – 6x$; hier ist $a_0 = 0$.

Wir berechnen ein Ersatzpolynom $p(x - (-3)) = p(x + 3)$,
also eine Entwicklung von p(x) an der Stelle $x_0 = -3$. Herleitung mit HornerSchema s. unten !

$p(x+3) = (x+3)^4 - 18\cdot(x+3)^3 + 119\cdot(x+3)^2 - 342\cdot(x+3) + 360$ alle Koeffizienten sind ungleich 0 !

Mit $z = x+3$ ergibt sich: $p(z) = z^4 - 18\cdot z^3 + 119\cdot z^2 - 342\cdot z + 360$

Die Nullstellen des ursprünglichen Polynoms P(x) sind jeweils um 3 kleiner (x = z - 3) als diejenigen des Ersatzpolynoms P(z). Man erhält für P(z) die Nullstellen 3; 4; 5; 6 , woraus sich für P(x) die Nullstellen 0; 1; 2; 3 herleiten lassen !

Vollständiges Horner-Schema für $p(x) = x^4 – 6x^3 + 11x^2 – 6x$; Entwicklungsstelle $x_0 = -3$.

Vollständiges Horner-Schema:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	Potenzen von p(x)
	1	−6	11	−6	0	Koeffizienten von p(x)
		+	+	+	+	
	↓	−3	27	−114	360	
	·−3 ↗	·−3 ↗	·−3 ↗	·−3 ↗		
$x_0 = -3$	1	−9	38	−120	$360 = A_0 = p(-3)$	
		+	+	+		
	↓	−3	36	−222		
	·−3 ↗	·−3 ↗	·−3 ↗			
$x_0 = -3$	1	−12	74	$-342 = A_1 = p'(-3)$		
		+	+			
	↓	−3	45			
	·−3 ↗	·−3 ↗				
$x_0 = -3$	1	−15	$119 = A_2 = p''(-3)/2!$			
		+				
	↓	−3				
	·−3 ↗					
$x_0 = -3$	1	$-18 = A_3 = p'''(-3)/3!$				
	↓					
$x_0 = -3$	$1 = A_4 = p^{(4)}(-3)/4!$					

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sind die Koeffizienten des Entwicklungspolynoms, so dass sich folgendes ergibt :

$p(x-(-3)) = p(x+3) = (x+3)^4 - 18\cdot(x+3)^3 + 119\cdot(x+3)^2 - 342\cdot(x+3) + 360$

bzw. mit $z = x+3$: $p(z) = z^4 - 18\cdot z^3 + 119\cdot z^2 - 342\cdot z + 360$